# EINBETTUNGEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN IN DEN DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER PHILOSOPHIE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN

FAKULTÄT DER

UNIVERSITÄT BASEL

VON

RETO ANTON RÜEDY

AUS BASEL UND MALANS (GRAUBÜNDEN)

BASEL 1968

Birkhäuser Verlag

1967

# EINBETTUNGEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN IN DEN DREIDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER PHILOSOPHIE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT DER

UNIVERSITÄT BASEL

VON

RETO ANTON RÜEDY
AUS BASEL UND MALANS (GRAUBÜNDEN)

BASEL 1968
Birkhäuser Verlag

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der

Herren Professoren Dr. HEINZ HUBER und Dr. WALTER HABICHT

Basel, den 7. November 1967

Prof. Dr. H. HUBER
Dekan

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Separatdruck aus
COMMENTARII MATHEMATICI HELVETICI
Band 43, Fasc. 4, 1968

# Inhaltsverzeichnis


## 1. Einleitung

1.1 Problemstellung . . . . . 417
1.2 Begriffe und die Sätze A und B . . . . . 417
1.3 K-quasikonforme Abbildungen . . . . . 419

## 2. Der Satz A für $g=1$

2.1 Moduln und $\xi$-Metriken $ds_\xi^2$ . . . . . 420
2.2 Der Verzerrungssatz für $g=1$ . . . . . 422
2.3 Der Kontinuitätsschluss . . . . . 423
2.4 Die Stabilität differentialgeometrischer Flächen . . . . . 424
2.5 Die Abänderungsfunktion $h_0$ . . . . . 425
2.6 Eine Approximation von $h_0$ . . . . . 427
2.7 Vergleich der Metriken $dX_\xi^2$ und $ds_\xi^2$ . . . . . 427
2.8 Der Beweis von Satz A (für $g=1$) . . . . . 428

## 3. Der Satz A für $g>1$

3.1 Der Teichmüllerraum $T_g(S_0)$ . . . . . 430
3.2 Der Verzerrungssatz . . . . . 432
3.3 Die Metrik $ds_\xi^2$ . . . . . 432
3.4 Die Hilfssfunktionen $\mu_\eta$ und $\mu_{\eta'}$ . . . . . 433
3.5 Die Lösung einer Differentialgleichung . . . . . 435
3.6 Die Abänderungsfunktion $h_0(z, \xi, \eta, N)$ . . . . . 436
3.7 Eine Approximation von $h_0$ . . . . . 438
3.8 Der Beweis von Satz A. . . . . 438

## 4. Der Satz B

4.1 Die Flächen mit endlich erzeugter Fundamentalgruppe . . . . . 438
4.2 Der zu S gehörige Teichmüllerraum . . . . . 439
4.3 Modifizierung des Beweises von Satz A . . . . . 441

Literaturverzeichnis . . . . . 442

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546022_0057

# Einbettungen Riemannscher Flächen in den dreidimensionalen euklidischen Raum

von Reto Rüedy (Basel)

## 1. Einleitung

### 1.1 *Problemstellung*

Flächen im Sinne der elementaren Differentialgeometrie können zu Riemannschen Flächen gemacht werden, indem man die isothermen Parameter als lokale Koordinaten benutzt. Diese Struktur nennt man die *natürliche*, weil genau diese lokalen Darstellungen winkeltreu sind.

F. Klein warf schon 1882 in seiner Schrift *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* das Problem auf, ob sich jede Riemannsche Fläche konform und bijektiv auf eine solche differentialgeometrische Fläche abbilden lasse.

Der Weg zu diesem überraschend schwierig zugänglichen Problem wurde durch die fundamentalen Arbeiten von Teichmüller geöffnet; aber erst um 1960 gelang der Beweis für den folgenden Satz:

Einbettungssatz von Garsia. *Jede kompakte Riemannsche Fläche ist konform äquivalent zu einer differentialgeometrischen Fläche, die reell-algebraisch im dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet ist.* (Für nicht kompakte Flächen ist das Problem immer noch offen.)

Garsia konstruiert seine Modelle, indem er an einer vorgegebenen eingebetteten Fläche eine endliche Folge von Abänderungen vornimmt: Die Punkte werden bei jedem Schritt in Richtung der jeweiligen Normalen verschoben. Die Anzahl der Schritte hängt vom Modul ab, der realisiert werden soll, und ist unbeschränkt.

Wir werden aber sehen, dass man das Verfahren so modifizieren kann, dass für jeden Modul eine einzige Abänderung ausreicht. Für die Flächen des Geschlechtes $g = 1$ wird dadurch der Beweis erstaunlich einfach.

Ferner soll der Einbettungssatz noch auf alle Flächen mit endlich erzeugter Fundamentalgruppe ausgedehnt werden: Es wird gezeigt, dass diese zu vollständigen differentialgeometrischen Flächen konform äquivalent sind.

### 1.2 *Begriffe und die Sätze A und B*

Es seien
$\mathbf{C}$ die komplexe Zahlenebene,
$\mathbf{R}^n$ der n-dimensionale euklidische Raum,
$\mathbf{E}^n$ die n-dimensionale Einheitskugel,
und *differenzierbar* bedeute immer unendlich oft differenzierbar.

DEFINITION 1. Eine *Riemannsche Fläche* ist eine zusammenhängende analytische zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

DEFINITION 2. Eine differenzierbare Abbildung $\phi$ einer Riemannschen Fläche $R$ in den $\mathbf{R}^3$ ist eine *Einbettung*, wenn sie noch folgende Eigenschaften besitzt:

a) $\phi$ hat in jedem Punkt von $R$ den Rang 2,

b) $\phi$ ist injektiv.

Weitere Eigenschaften der Einbettung, z.B. reell-analytisch, beziehen sich auf die Abbildung $\phi$.

DEFINITION 3. Ist

$$\boldsymbol{X}(x, y) = (x_1(x, y), x_2(x, y), x_3(x, y)),$$

eine lokale Darstellung einer eingebetteten Fläche $\phi(R)$, so definiert die Form

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x} dx + \frac{\partial x_i}{\partial y} dy \right)^2$$

die sog. *natürliche Metrik* auf $\phi(R)$.

Ist auf einer Fläche eine Metrik

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2 \equiv \lambda(x, y)\,|dz + \mu(x, y)\,d\bar{z}|^2, \qquad z = x + iy,$$

definiert, ist $\mu$ differenzierbar und

$$\sup |\mu| < 1,$$

was mit

$$\inf(E\,G - F^2) > 0$$

äquivalent ist, dann besitzt die Beltramigleichung

$$w_{\bar{z}} = \mu\, w_z$$

differenzierbare Lösungen $w$, die eine topologische Abbildung $\hat{w} = w \circ \boldsymbol{X}^{-1}$ einer Umgebung $U$ von $\boldsymbol{X}(x, y)$ auf der Fläche in die Ebene induzieren. Diese Umgebungen überdecken die ganze Fläche. Die so entstandenen lokalen Koordinatensysteme $(U, \hat{w})$ sind analytisch verknüpft und definieren folglich eine konforme Struktur. Die Metrik stellt sich in diesen Parametern $w$ (und nur in diesen) in der Form

$$ds^2 = \lambda_1(w, \bar{w}) \cdot |dw|^2$$

dar, d.h. $w$ sind die bezüglich der Metrik $ds^2$ isothermen Parameter.

Aus diesen Tatsachen entspringen folgende Definitionen:

DEFINITION 4. Ist eine Fläche mit einer differenzierbaren, nirgends ausgearteten Metrik $ds^2$ versehen, so nennt man die oben beschriebene Struktur $\{(U, \hat{w})\}$ *die von der Metrik* $ds^2$ *abgeleitete konforme Struktur.*

DEFINITION 5. Die von der natürlichen Metrik einer eingebetteten Fläche abgeleitete Struktur heisst die *natürliche Struktur* der Fläche.

DEFINITION 6. Die Riemannsche Fläche, die entsteht, wenn eine eingebettete Fläche mit ihrer natürlichen Struktur versehen wird, nennen wir eine *differentialgeometrische Fläche (DF)*.

DEFINITION 7. Eine *DF* heisst *vollständig*, wenn bez. der natürlichen Metrik jede Fundamentalfolge von Punkten auf der Fläche gegen einen Punkt der Fläche konvergiert.

SATZ A. Vorgegeben seien

1) *eine kompakte Riemannsche Fläche S,*

2) *eine reell-analytische DF* $S_0$ *desselben topologischen Typs,*

3) *eine Zahl* $\varepsilon_0 > 0$.

*z sei ein uniformisierender Parameter,* $\boldsymbol{X}_0(z)$ *eine Darstellung der Fläche* $S_0$ *und* $N_0(z)$ *die positive Einheitsnormale zu* $S_0$ *im Punkte* $\boldsymbol{X}_0(z)$.

*Dann gibt es auf* $S_0$ *eine reellwertige Funktion h mit den folgenden Eigenschaften*:

a) *h ist reell-analytisch,*

b) $|h| < \varepsilon_0$,

c) $\boldsymbol{X}(z) = \boldsymbol{X}_0(z) + h(\boldsymbol{X}_0(z)) \cdot N_0(z)$ *stellt eine reell-analytische DF* $\tilde{S}$ *dar,*

d) $\tilde{S}$ *ist konform äquivalent zu S.*

SATZ B. *Zu jeder Riemannschen Fläche mit endlich erzeugter Fundamentalgruppe gibt es eine konform äquivalente vollständige DF.*

### 1.3 *K-quasikonforme Abbildungen*

Im Hinblick auf unsere Anwendungen beschränken wir uns auf topologische, bis auf isolierte Punkte stetig differenzierbare Abbildungen $f$ von Teilbereichen der Ebene in die Ebene. Ferner nehmen wir an, die Funktionaldeterminante, $\det(df)$, sei überall positiv, wo sie definiert ist.

Für solche Funktionen $f(x, y)$, $z = x + iy$, definieren wir die komplexen Ableitungen $f_z$ und $f_{\bar{z}}$ durch die Gleichung

$$df = f_z\, dz + f_{\bar{z}}\, d\bar{z}.$$

Diese komplexen Ableitungen sind mit den gewöhnlichen also durch die Gleichungen

$$f_z = \tfrac{1}{2}(f_x - i f_y), \qquad f_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}(f_x + i f_y)$$

verknüpft. Aus diesen Formeln folgen fast unmittelbar die nachstehenden Beziehungen:

1) $f$ ist genau dann holomorph, wenn $f_{\bar{z}} = 0$ ist,

2) $det(df) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0$,

3) $(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leqslant |df| \leqslant (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)\cdot|dz|$ oder mit Richtungsableitungen geschrieben

$$\operatorname*{Max}_{\varphi} |\partial_\varphi f| = |f_z| + |f_{\bar{z}}|, \qquad \operatorname*{Min}_{\varphi} |\partial_\varphi f| = |f_z| - |f_{\bar{z}}|.$$

DEFINITION 8. Der *Dilatationsquotient* der Funktion $f$ an der Stelle $z$ ist die Zahl

$$D_f(z) = \frac{\operatorname*{Max}_{\varphi} |\partial_\varphi f|}{\operatorname*{Min}_{\varphi} |\partial_\varphi f|}.$$

Er lässt sich nach dem vorigen auch durch die folgenden Ausdrücke beschreiben:

$$D_f(z) = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} = \frac{\operatorname*{Max}_{\varphi} |\partial_\varphi f|^2}{\det(df)}.$$

DEFINITION 9. Die Abbildung $f$ heisst im Definitionsbereich $G$ $K$-quasikonform, wenn gilt

$$D_f(z) \leqslant K \qquad \text{für fast alle } z \in G.$$

Die nachstehenden Eigenschaften folgen wiederum leicht:

1) $D_f(z) \geqslant 1$,
2) $f$ ist genau dann holomorph in $z$, wenn $D_f(z) = 1$ ist,
3) $D_f(z) = D_{f^{-1}}(f(z))$,
4) $D_{f\circ g}(z) \leqslant D_f(g(z))\, D_g(z)$,
5) $D_{h\circ f\circ g}(z) = D_f(g(z))$, falls $h$ und $g$ holomorph sind.

Aus 5) folgt, dass die oben definierten Begriffe auch noch sinvoll sind, wenn man sie auf Abbildungen überträgt, die auf Riemannschen Flächen definiert sind, und deren Bilder in Riemannschen Flächen liegen.

Schliesslich wollen wir noch $|f_{\bar{z}}|$ mit $D_f$ ausdrücken: Aus

$$(D_f - 1)^2 \cdot \frac{1}{D_f} = \left(\frac{2|f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}\right)^2 \cdot \frac{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}{|f_z| + |f_{\bar{z}}|} = \frac{|2f_{\bar{z}}|^2}{\det(df)}$$

folgt

$$|2f_{\bar{z}}|^2 = \frac{(D_f - 1)^2}{D_f} \cdot \det(df).$$

## 2. Der Satz A für $g = 1$

### 2.1 *Moduln und $\xi$-Metriken $ds^2_\xi$*

Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 1$ ist konform äquivalent zu einer Fläche

$$S(\omega) = \mathbf{C}/\{n + m\omega \mid n, m \text{ ganze Zahlen}\}, \qquad \operatorname{Im}\omega > 0.$$

$P(\omega)$ sei das zugehörige Parallelogramm mit den Eckpunkten $0, 1, \omega, \omega + 1$.

$$\xi(\omega) = \frac{i - \omega}{i + \omega} \in \mathbf{E}^2$$

nennen wir einen Modul von $S(\omega)$. Insbesondere ist der Modul $\xi(i)$ der Kreisringfläche mit dem Radienverhältnis $\sqrt{2}$ gerade null; denn diese Fläche $S_0$ ist konform äquivalent zu (s. z.B. [15])

$$\mathbf{C}/\{n + i\,m \mid n, m \text{ ganze Zahlen}\}.$$

Die natürliche Metrik von $S_0$ hat die Gestalt

$$d\mathbf{X}_0^2(z) = \lambda^2(z) \cdot |dz|^2, \qquad z = x + i\,y, \qquad 0 \leqslant x, y \leqslant 1,$$

wobei $\lambda$ eine reelle, nach $x$ und $y$ differenzierbare, nirgends verschwindende Funktion ist.

Mit einer linearen Abbildung $f(z)$ verpflanzen wir die Metrik von $P(\omega)$ auf das Quadrat $P(i)$:

$$f(z) = \frac{i + \omega}{2i}(z + \xi \bar{z})$$

führt 0 in 0, 1 in 1 und $i$ in $\omega$, d.h. $P(i)$ in $P(\omega)$, also $S(i)$ in $S(\omega)$ über. Versehen wir daher $S_0$ mit der von der Metrik

$$ds_\xi^2 = \lambda^2(z)|dz + \xi\, d\bar{z}|^2$$

abgeleiteten Struktur, so bildet $f$ diese neue Fläche $S_0(ds_\xi^2)$ konform auf $S(\omega)$ ab. $S_0(ds_\xi^2)$ besitzt folglich den Modul $\xi$.

Die natürliche Metrik der abgeänderten Fläche $\tilde{S}$ in *Satz A* wird die Gestalt

$$(d\mathbf{X})^2 = (d\mathbf{X}_0)^2 + (dh)^2 + 2h\, d\mathbf{X}_0\, d\mathbf{N}_0 + h^2 (d\mathbf{N}_0)^2$$

aufweisen, da $\mathbf{N}_0^2 = 1$, $\mathbf{N}_0 d\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}_0 d\mathbf{X}_0 = 0$ ist. Da aber $h$ sehr klein sein muss, haben wir auf der rechten Seite im wesentlichen nur

$$\lambda^2 |dz|^2 + (dh)^2.$$

Daher wollen wir auch $ds_\xi^2$ in dieser Weise aufspalten:

Mit den Bezeichnungen

$$\gamma_\xi = (1 - |\xi|)^{-2}, \qquad \xi \in \mathbf{E}^2,$$
$$\alpha_\xi^2 = 2\gamma_\xi(|\xi| + \operatorname{Re}\xi)$$
$$\beta_\xi^2 = 2\gamma_\xi(|\xi| - \operatorname{Re}\xi)$$

und mit der Vorzeichenwahl

$$\operatorname{sgn}(\alpha_\xi \beta_\xi) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\xi)$$

erhalten wir ($dz^2 = dx^2 - dy^2 + 2i\,dx\,dy$)

$$\gamma_\xi \cdot ds_\xi^2 = \gamma_\xi \lambda^2(z)\,[|dz|^2(1+|\xi|^2) + (\xi+\bar{\xi})(dx^2-dy^2) - 2i\,dx\,dy(\xi-\bar{\xi})]$$

und wegen

$$\begin{aligned}\gamma_\xi^{-1}(\alpha_\xi dx + \beta_\xi dy)^2 &= 2(|\xi| + \operatorname{Re}\xi)\,dx^2 + 2(|\xi| - \operatorname{Re}\xi)\,dy^2 + 4\operatorname{Im}\xi\,dx\,dy \\ &= 2|\xi|\cdot|dz|^2 + (\xi+\bar{\xi})(dx^2-dy^2) - 2i(\xi-\bar{\xi})\,dx\,dy\end{aligned}$$

die gesuchte Zerlegung

$$\gamma_\xi ds_\xi^2 = \lambda^2(z)\cdot(|dz|^2 + (\alpha_\xi dx + \beta_\xi dy)^2).$$

2.2 *Der Verzerrungssatz für $g = 1$* (s. [5], [6])

In diesem Abschnitt reproduzieren wir einen Satz von GARSIA und den Beweis in einer leicht abgeänderten Form.

VORAUSSETZUNGEN.

1) $f: S_0(ds_\xi^2) \to S'$ sei eine topologische, $K$-quasikonforme Abbildung der Riemannschen Fläche $S_0(ds_\xi^2)$ mit dem Modul $\xi$ auf die Riemannsche Fläche $S'$ mit dem Modul $\xi'$.

2) Ist $X_0(z)$ die konforme Abbildung von $P(i)$ auf $S_0(|dz|^2)$, so sei

$$D_f(x_0(z)) < 1 + \eta_D, \qquad \forall z \in P(i) - F,$$

und für den euklidischen Flächeninhalt von $F$ gelte

$$|F| < \eta_F.$$

BEHAUPTUNG.

$$|\xi' - \xi| < \tfrac{1}{2}(\eta_D + \sqrt{\eta_F \cdot K}).$$

BEMERKUNG. Überraschend ist, dass in dieser Formulierung $\xi$ in der rechten Seite gar nicht auftritt. Im Falle $g > 1$ hingegen werden wir erst dann eine solche Gleichmässigkeitsaussage erhalten, wenn wir in der Voraussetzung $\xi$ auf ein Kompaktum einschränken.

*Beweis.* Wir wählen die uniformisierenden Parameter so, dass die von $f$ induzierte Abbildung $\hat{f}$ von $P(\omega)$ in die Ebene $\mathbf{C}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\hat{f}(z+1) = \hat{f}(z) + 1, \qquad \hat{f}(z+\omega) = \hat{f}(z) + \omega', \qquad \operatorname{Im}\omega' > 0,$$

wobei $\xi' = \xi(\omega')$ ein Modul von $S'$ ist. Der Fläche $F$ auf $P(i)$ entspricht eine Fläche $F'$ auf $P(\omega)$ mit dem Inhalt

$$|F'| = |F| \cdot \operatorname{Im}\omega.$$

Es ist wegen der obigen Relationen

$$\omega - \omega' = \int_{\partial P(\omega)} \hat{f}(z)\,dz,$$

– die übrigen Terme der Randintegration heben sich gegenseitig weg – und nach dem Satz von STOKES

$$\omega - \omega' = \int\limits_{P(\omega)} d(\hat{f}(z)\,dz) = \int\limits_{P(\omega)-F'} 2i\hat{f}_{\bar{z}}\,dx\,dy + \int\limits_{F'} 2i\hat{f}_{\bar{z}}\,dx\,dy\,.$$

Die beiden Integrale lassen sich mit der Ungleichung von CAUCHY–SCHWARZ und der Gleichung für $|2f_{\bar{z}}|^2$ am Schluss von 1.6 so abschätzen:

$$\left|\int\limits_{P-F'} 2i\hat{f}_{\bar{z}}\,dx\,dy\right|^2 \leqslant |P-F'| \int\limits_{P-F'} \frac{(D_f-1)^2}{D_f} \det(df)\,dx\,dy \leqslant \operatorname{Im}\omega\cdot\eta_D^2\cdot\operatorname{Im}\omega'$$

$$\left|\int\limits_{F'} 2i\hat{f}_{\bar{z}}\,dx\,dy\right|^2 < \eta_F \operatorname{Im}\omega\cdot K\cdot\operatorname{Im}\omega'\,.$$

Daraus aber folgt

$$|\xi-\xi'| = \left|\frac{i-\omega}{i+\omega} - \frac{i-\omega'}{i+\omega'}\right| = \left|\frac{2(\omega'-\omega)}{(i+\omega)(i+\omega')}\right| <$$

$$\leqslant \left|\frac{2\sqrt{\operatorname{Im}\omega}\,\sqrt{\operatorname{Im}\omega'}}{(i+\omega)\cdot(i+\omega')}\right|\cdot(\eta_D+\sqrt{\eta_F\cdot K}) \leqslant \tfrac{1}{2}(\eta_D+\sqrt{\eta_F\cdot K}),$$

denn für $\operatorname{Im} z>0$ ist ja

$$|i+z| \geqslant (1+\operatorname{Im} z) \geqslant 2\sqrt{\operatorname{Im} z}\,.$$

2.3 *Der Kontinuitätsschluss*

$\xi'(\xi)$ bilde die $n$-dimensionale Kugel $M$ mit dem Zentrum $\xi_0$ und dem Radius $\varepsilon$ stetig in den $\mathbf{R}^n$ ab, und es gelte

$$|\xi'(\xi)-\xi| < \varepsilon \qquad \forall\,\xi\in M\,.$$

Dann liegt $\xi_0$ in $\xi'(M)$.

Für $g=1$ brauchen wir nur den Fall $n=2$ zu untersuchen. Hier aber geht der Beweis aus einigen elementaren Eigenschaften der Umlaufszahl $U(\Gamma, z)$ eines stetigen Zyklus $\Gamma$ um einen Punkt $z$ hervor. Es ist nämlich zufolge der Voraussetzungen über $\xi'(\xi)$

$$U(\xi'(\partial M), \xi_0) = U(\partial M, \xi_0) = 1;$$

ferner gilt

$$U(\xi'(\partial M), \xi) = 0 \qquad \forall\,\xi\notin\xi'(M),$$

da $\xi'(\partial M)$ in $\xi'(M)$ auf den Punkt $\xi'(\xi_0)$ zusammengezogen werden kann. Folglich ist $\xi_0\in\xi'(M)$. Einen Beweis im Falle $n>2$ findet man z.B. in [9], p. 75, Ex. VI,2.

2.4 *Die Stabilität differentialgeometrischer Flächen*

LEMMA 1. *Mit den Bezeichnungen von* Satz A *gibt es zu jeder Fläche* $S_0$ *ein* $\varepsilon_1 > 0$ *derart, dass für alle auf* $S_0$ *reell-analytischen Funktionen h mit*

$$|h| < \varepsilon_1$$

$\tilde{S}$ *eine reell-analytische DF ist.*

*Beweis.* Mit $\mathbf{X}_0(z)$ ist auch $\mathbf{N}_0(z)$, die Normalenfunktion, und damit auch

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{X}_0(z) + h(z)\cdot\mathbf{N}_0(z)$$

reell-analytisch.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass der Rang stabil bleibt, d.h.

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial x}\mathbf{N}_0 + h\dfrac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial y} + \dfrac{\partial h}{\partial y}\mathbf{N}_0 + h\dfrac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial y} \end{pmatrix} = 2 \quad \text{für} \quad |h| < \varepsilon_1 .$$

Dieser Rang ist genau dann 2, wenn die Summe $\sum$ der Quadrate aller zweireihigen Unterdeterminanten nicht null ist. $\sum$ lässt sich aber mit Hilfe von Vektor- $(\times)$ und Skalarprodukt leicht berechnen:

$$\sum = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial x} + \beta_1 \mathbf{N}_0 + \alpha \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial x}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial y} + \beta_2 \mathbf{N}_0 + \alpha \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial y}\right)\right)^2 ,$$

$$\beta_1 = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \beta_2 = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \alpha = h$$

Für $\alpha = 0$ ist

$$\sum = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial x}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial y}\right) + \beta_2 \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial x}\right) \times \mathbf{N}_0 + \beta_1 \cdot \mathbf{N}_0 \times \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial y}\right)\right)^2 \geqslant \left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial y}\right)^2 = \sum_0 ,$$

da die weggelassenen Vektoren senkrecht auf dem ersten Summanden stehen und den Betrag deshalb höchstens vergrössern würden. $\sum_0$ wird aber nie null, da die Abbildung $\mathbf{X}_0$ überall regulär ist, und besitzt als stetige Funktion wegen der Kompaktheit von $S_0$ ein positives Minimum $\delta$.

Ferner ist $\sum$ eine stetige Funktion von $(z, \alpha)$ auf $S_0 \times [-1, +1]$, also auf diesem Kompaktum gleichmässig stetig. Insbesondere gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ derart, dass

$$|\sum(z, \alpha) - \sum(z, 0)| < \frac{\delta}{2} \quad \forall z \in S_0, \quad |\alpha| < \varepsilon_1 .$$

Für $|h| < \varepsilon_1$ ist daher: $\sum > \delta/2$ und folglich der Rang der Abbildung $\mathbf{X}(z)$ zwei.

Um einzusehen, dass $\mathbf{X}(z)$ schlicht ist, bemerken wir, dass die Abbildung

$$(x, y, \alpha) \to \mathbf{X}_0(x, y) + \alpha \mathbf{N}_0(x, y)$$

in jedem Punkt $(x, y, 0)$ regulär ist, da ja die drei Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial y}, \quad \mathbf{N}_0$$

linear unabhängig sind. Daraus folgt die Behauptung lokal sofort. Die globale Aussage schliessen wir wieder aus der Kompaktheit von $S_0$.

2.5 *Die Abänderungsfunktion* $h_0$

Wir wollen die Eigenschaften, die die Funktion $h$ aus *Satz A* erfüllen müsste, zusammenstellen: Sehen wir von der Funktion $\lambda$ ab, so können wir aus den Abschnitten 1 und 4 dieses Kapitels schliessen:

1) $(dh)^2 \approx (\alpha_\xi\, dx + \beta_\xi\, dy)^2$,
2) $|h| < \varepsilon_1$,
3) $h$ ist differenzierbar,
4) $h$ ist eine Funktion auf $S_0$.

Aus 1) folgte $h = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$, was natürlich 2) widerspricht. Deshalb müssen wir die globale Linearität fallenlassen und für $h$ eine stückweise lineare Funktion ansetzen. Am einfachsten geht dies, wenn wir auf $\alpha x + \beta y$ eine Sägezahnfunktion mit der Steigung $\pm 1$ anwenden. Der Vorzeichenwechsel ist für die Bedingung 1) glücklicherweise belanglos. Hingegen wird bei den Spitzen 3) verletzt, was sich durch ein Glättungsverfahren aber leicht gutmachen lässt. Dabei wird aber wieder 1) verletzt was jedoch nach dem Verzerrungssatz nichts ausmacht, wenn die Fläche, auf der dies geschieht, genügend klein bleibt. Bedingung 4) erzwingen wir dadurch, dass wir $h$ in einer Umgebung des Randes von $P(i)$ null setzen und wieder glätten.

Wir benötigen also zwei reelle differenzierbare Funktionen mit den folgenden Eigenschaften: Es sei $\eta < \frac{1}{2}$,

$\mu_\eta(x)$:
a) $0 \leqslant \mu_\eta \leqslant 1$
b) $\mu_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant \eta/2 \\ 1 & \text{für} \quad \eta \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$
c) $\mu_\eta(1 - x) = \mu_\eta(x)$

$\nu_\eta(x)$:
a) $|\dot{\nu}_\eta(x)| \leqslant 1$
b) $\nu_\eta(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad \eta - 1 \leqslant x \leqslant 1 - \eta \\ 2 - x & \text{für} \quad 1 + \eta \leqslant x \leqslant 3 - \eta \end{cases}$
c) $\nu_\eta(x + 4) = \nu_\eta(x)$.

Es gilt für

$$F_\mu = \{(x, y) \,|\mu_\eta(x)\cdot\mu_\eta(y) \neq 1, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$$
$$|F_\mu| < 4\eta$$

und für

$$F_\nu = \{(x, y) \mid \nu_\eta^2(N[\alpha_\xi x + \beta_\xi y]) \neq 1, 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$$
$$|F_\nu| < 2\eta \quad \text{für} \quad N > \sqrt{2}/\sqrt{|\xi|};$$

denn $F_\nu$ besteht aus dem Durchschnitt von $P(i)$ mit den parallelen, äquidistanten Streifen, die durch die Ungleichungen

$$1 - \eta + 2m \leqslant N(\alpha_\xi x + \beta_\xi y) \leqslant 1 + \eta + 2m, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots$$

definiert sind. Die Breite der Streifen verhält sich zum Abstand der Mittellinien zweier benachbarter Streifen wie $\eta:1$; $|F_\nu|$ kann sich daher von $\eta$ höchstens um die Fläche $|F_1|$ eines Streifens in $P(i)$ unterscheiden; diese ist kleiner oder gleich dem Minimum des Schnittes des Streifens mit der $x$-Achse oder der $y$-Achse, also (s. II1)

$$|F_1| < \frac{2\eta}{N\cdot\mathrm{Max}(|\alpha_\xi|, |\beta_\xi|)} < \frac{2\eta}{N}\cdot\frac{1}{\sqrt{2|\xi|}} < \eta\,.$$

Im Beweis werden wir $\xi$ auf eine kompakte Menge $M \subset \mathbf{E}^2$, die den Nullpunkt nicht enthält, beschränken. Daher können wir die Bedingung $N > \sqrt{2}/\sqrt{|\xi|}$ durch $N > N_M$ ersetzen. Es ist also

$$|F| \leqslant |F_\mu| + |F_\nu| < 6\eta \qquad \forall\, N > N_M\,.$$

Wir definieren für $(x, y) \in P(i)$, $\xi \in M$, $N > N_M$

$$h_0(x, y, \xi, N) = \frac{1}{N}\,\mu_\eta(x)\cdot\mu_\eta(y)\cdot\lambda(x, y)\cdot\nu_\eta[N(\alpha_\xi x + \beta_\xi y)]\,.$$

Es ist

$$dh_0 = \lambda\cdot\mu_\xi(x)\cdot\mu_\eta(y)\cdot\nu_\eta[N(\alpha_\xi x + \beta_\xi y)]\,(\alpha_\xi dx + \beta_\xi dy) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

wobei $O(1/N)$ für $N \to \infty$ auf $P(i) \times M$ gleichmässig gegen null geht; denn alle darin vorkommenden Funktionen sind auf diesem Kompaktum stetig und enthalten den Faktor $1/N$.

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der Schlussformel von Abschnitt 2.1, erhalten wir

LEMMA 2. *Für die Funktion $h_0$ gilt*

$$|dh_0^2 + \lambda^2\,|dz|^2 - \gamma_\xi\,ds_\xi^2| < R(\eta; N)\,ds_\xi^2 \quad \text{auf} \quad P - F, \forall\,\xi \in M\,,$$

*und*

$$|F| < k_M \cdot \eta \quad \text{für} \quad N > N_M ,$$

*wobei $k_M$ und $N_M$ nur vom Kompaktum $M$ abhängige Konstanten sind und $R(\eta; N)$ für jedes feste $\eta$ mit $N \to \infty$ beliebig klein gemacht werden kann.*

Bemerkung. Das Symbol $R(x_1, \ldots, x_n; n_1, \ldots, n_m)$ soll, ausführlich beschrieben, folgendes besagen: Zu jedem System $(\varepsilon, x_1, \ldots, x_n)$, $\varepsilon > 0$, kann man zuerst $n_1$, hierauf $n_2$ usw. so gross wählen, dass die zur Diskussion stehende Ungleichung richtig wird, wenn man $R$ durch $\varepsilon$ ersetzt.

2.6 *Eine Approximation von $h_0$*

Lemma 3. *Gilt für die Funktionen $h_n(x, y, \xi)$ und ihre ersten Ableitungen*

a) *sie sind stetig auf dem Kompaktum $S_0 \times M$,*

b) *sie streben für jedes feste $\xi$ gleichmässig gegen $h_0$ bzw. $\partial h_0/\partial x$, $\partial h_0/\partial y$, dann ist*

$$|dh_n^2 - dh_0^2| < R(\eta, N; n) \cdot ds_\xi^2, \qquad \xi \in M ,$$

*wobei $R(\eta, N; n)$ für $n \to \infty$ beliebig klein gemacht werden kann.*

*Beweis.* Aus b) folgt, dass die Ungleichung für jedes feste $\xi = \xi_0$ gilt. Wegen a) gilt sie dann auch noch für eine ganze Umgebung von $\xi_0$. Die globale Aussage folgt nun wiederum aus der Kompaktheit von $M$.

Die n-ten Partialsummen der zweifachen Fourierreihen der Funktionen $h_0(x, y; \xi, N)$ erfüllen bekanntlich alle Vorzussetzungen von *Lemma* 3.

2.7 *Vergleich der Metriken $dX_\xi^2$ und $ds_\xi^2$*

Lemma 4. *Die natürliche Metrik der Fläche*

$$\mathbf{X}_\xi(x, y) = \mathbf{X}_0(x, y) + h_n(x, y; \xi, N) \cdot \mathbf{N}_0(x, y)$$

*befriedigt folgende Relationen:*

a) $$\frac{\sup\limits_{\varphi} (d\mathbf{X}_{\xi_m}^2 / d\mathbf{X}_\xi^2)}{\inf\limits_{\varphi} (d\mathbf{X}_{\xi_m}^2 / d\mathbf{X}_\xi^2)} \to 1 \quad \text{für} \quad \xi_m \to \xi$$

*und zwar gleichmässig auf $P$,*

b) $$\frac{\sup\limits_{\varphi} (dX_\xi^2 / ds_\xi^2)}{\inf\limits_{\varphi} (dX_\xi^2 / ds_\xi^2)} \leqslant \begin{cases} 1 + R_1(\eta; N, n) & \text{auf} \quad P - F \\ 4\gamma_\xi + R_2(\eta; N, n) & \text{auf} \quad F , \end{cases}$$

*falls $\xi$ dem fest vorgegebenen Kompaktum $M$ angehört, wobei die Konstanten $R_1$ und $R_2$ für ein festes $\eta$ und genügend grosse $N$ und $n$ beliebig klein gewählt werden können.*

*Beweis.* Aus $\mathbf{N}_0^2 = 1$, $\mathbf{N}_0 d\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}_0 d\mathbf{X}_0 = 0$ folgt

$$d\mathbf{X}_\xi^2 = d\mathbf{X}_0^2 + dh_n^2 + 2h_n d\mathbf{X}_0 d\mathbf{N}_0 + h_n^2 d\mathbf{N}_0^2.$$

Dieser Ausdruck ist aber stetig auf dem Kompaktum $P \times M$, womit a) sofort folgt. (Es ist sogar: $d\mathbf{X}_{\xi m}^2 \to d\mathbf{X}_\xi^2$).

Da $h_0$ für $N \to \infty$ beliebig klein gemacht werden kann und $h_n$ gleichmässig gegen $h_0$ strebt, ist

$$|d\mathbf{X}_\xi^2 - dh_n^2 - d\mathbf{X}_0^2| \leqslant \tilde{R}(\eta; N, n)\, ds_\xi^2.$$

Zusammen mit *Lemma* 2 und 3 folgt

$$\begin{aligned}
\sup_\varphi \frac{d\mathbf{X}_\xi^2}{ds_\xi^2} &\leqslant \sup_\varphi \frac{d\mathbf{X}_0^2 + dh_n^2}{ds_\xi^2} + \tilde{R}(\eta; N, n) \\
&\leqslant \sup_\varphi \frac{d\mathbf{X}_0^2 + dh_0^2}{ds_\xi^2} + R(\eta, N; n) + \tilde{R}(\eta: N, n) \\
&\leqslant \gamma_\xi + R(\eta; N) + R(\eta, N; n) + \tilde{R}(\eta: N, n); \\
\inf_\varphi \frac{d\mathbf{X}_\xi^2}{ds_\xi^2} &\geqslant \inf_\varphi \frac{d\mathbf{X}_0^2}{ds_\xi^2} - \tilde{R}(\eta: N, n) \\
&= \inf_\varphi \frac{\lambda^2 |dz|^2}{\lambda^2 |dz + \xi d\bar{z}|^2} - \tilde{R}(\eta; N, n) \\
&\geqslant \inf_{\xi \in M} \frac{1}{(1 + |\xi|)^2} - \tilde{R}(\eta: N, n) \\
&> \frac{1}{4} - \tilde{R}(\eta; N, n);
\end{aligned}$$

ausserhalb $F = F_\mu \cup F_\nu$ gilt sogar

$$\inf_\varphi \frac{d\mathbf{X}_\xi^2}{ds_\xi^2} \geqslant \gamma_\xi - R(\eta; N) - R(\eta, N; n) - \tilde{R}(\eta; N, n).$$

Daraus folgt b) aber unmittelbar.

2.8 *Der Beweis von Satz A (für $g = 1$)*

(Als Ausgangsfläche $S_0$ in *Satz A* nehmen wir die zu

$$\mathbf{C}/\{n + i m\}$$

äquivalente Torusfläche mit dem Modul $\xi(S_0) = 0$. Für jede andere Fläche geht der Beweis natürlich ganz analog.)

Es sei $\xi_0 \neq 0$ ein beliebiger Modul: Wir wollen eine Fläche $\tilde{S}$ mit dem Modul $\xi_0$ konstruieren.

Wir setzen dazu

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\operatorname{Min}(1 - |\xi_0|, |\xi_0|),$$

$$M = \{\xi \mid |\xi - \xi_0| \leqslant \varepsilon\}$$

$$K = \frac{3}{\varepsilon},$$

und wählen $5 > \eta_D > 0$ und $\eta_F > 0$ so klein, dass in der Behauptung des Verzerrungssatzes

$$|\xi' - \xi| < \varepsilon$$

wird (z.B. $\eta_D = \varepsilon$, $\eta_F = \varepsilon^2/K = \varepsilon^3/3$).

(Da $M$ mindestens eine der beiden Halbachsen $x \geqslant 0$ oder $x \leqslant 0$ meidet, können in 2.1 die Funktionen $\alpha_\xi$ und $\beta_\xi$ so gewählt werden, dass sie auf $M$ stetig sind und die Gleichung

$$\operatorname{sgn}(\alpha_\xi \beta_\xi) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \xi)$$

erfüllt ist.)

Für $\gamma_\xi = (1 - |\xi|)^{-2}$ gilt auf $M$

$$\gamma_\xi \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Um die Funktionen $\mu_\eta$ und $\nu_\eta$ festzulegen, wählen wir $\eta$ so klein, dass in *Lemma* 2

$$|F| < \eta_F$$

wird.

Schliesslich müssen wir noch $N$ und $n$ angeben, um die gesuchte Abänderungsfunktion $h_n$ definieren zu können: Zuerst wählen wir

$$N_0 > \frac{1}{\operatorname{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_0)} \cdot \operatorname*{Max}_{z \in P} |\lambda(z)|,$$

wobei $\varepsilon_1$ die Konstante aus *Lemma* 1, $\varepsilon_0$ die Konstante aus *Satz* A und $\lambda |dz|^2$ die natürliche Metrik von $S_0$ ist. Dann nehmen wir $N > N_0 + N_M$ und schliesslich $n$ so gross, dass für die in Lemma 4 vorkommenden Symbole $R_1$ und $R^2$

$$R_1(\eta; N, n) = \eta_D,$$

$$R_2(\eta; N, n) = \frac{5}{\varepsilon^2}$$

gesetzt werden darf.

Die Flächen

$$\mathbf{X}(\xi, x, y) = \mathbf{X}_0(x, y) + h_n(x, y, \xi) \cdot \mathbf{N}_0(x, y), \; \xi \in M,$$

sind jetzt vollständig bestimmt und stellen nach Lemma 1 reell-analytische $DF S_\xi$ dar. Der Modul $\xi'(\xi)$ von $S_\xi$ ändert sich nach *Lemma* 4 a) stetig; denn die Abbildung

$$f_m: S_{\xi_m} \to S_\xi$$

durch gleiche Parameter ist topologisch und quasikonform mit dem Dilatationsquotienten

$$D_{f_m}^2 = \frac{\sup_\varphi (d\mathbf{X}_{\xi_m}^2 / d\mathbf{X}_\xi^2)}{\inf_\varphi (d\mathbf{X}_{\xi_m}^2 / d\mathbf{X}_\xi^2)},$$

was fast unmittelbar aus der Definition des Dilatationsquotienten folgt. $D_{f_m}$ strebt daher für $\xi_m \to \xi$ gleichmässig gegen 1, woraus mit Hilfe des Verzerrungssatzes ($\eta_F = 0$) die Beziehung $\xi'(\xi_m) \to \xi'(\xi)$ folgt.

Wendet man dieselbe Überlegung auf die Abbildungen

$$f_\xi: s_\xi \to s_0(ds_\xi^2)$$

durch gleiche Parameter an, so folgt aus *Lemma* 4 b) und unserer Wahl der Konstanten

$$D_{f_\xi} \leqslant \begin{cases} 1 + \eta_D < 6 < K & \text{auf} \quad P - F \\ \frac{3}{\varepsilon} = K & \text{auf} \quad P \end{cases},$$

$$|F| < \eta_F,$$

also aus dem Verzerrungssatz

$$|\xi'(\xi) - \xi| < \varepsilon, \qquad \forall\, \xi \in M.$$

Damit erfüllt $\xi'(\xi)$ die Voraussetzungen des Kontinuitätsschlusses; also besitzt für einen gewissen Modul $\xi_1 \in M$ die Fläche $S_{\xi_1}$ gerade den Modul $\xi_0$. Da 0 der Modul von $S_0$ und $\xi_0 \neq 0$ beliebig war, ist damit *Satz A* (für $g = 1$) vollständig bewiesen.

## 3. Der Satz A für $g > 1$

### 3.1 *Der Teichmüllerraum* $T_g(S_0)$

Die Paare $(S, f)$ sollen aus einer kompakten Riemannschen Fläche $S$ vom Geschlecht $g$ und einer topologischen Abbildung $f$ der festen Fläche $S_0$ auf $S$ bestehen. In der Menge all dieser Paare führen wir folgende Äquivalenzrelation ein: $(S, f) \sim (S_1, f_1)$, wenn $S$ durch eine zu $f_1 \circ f^{-1}$ homotope Abbildung konform auf $S_1$ abgebildet werden kann. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation sind die Elemente des Teichmüllerraums $T_g(S_0)$. Jeder Fläche $S$ entsprechen dabei mehrere Elemente des Teichmüllerraums, was aber für unsere Zwecke belanglos ist.

Ein Satz von TEICHMÜLLER besagt, dass es zu zwei Elementen $(S_1, f_1)$ und $(S_2, f_2)$ aus $T_g$ genau eine quasikonforme Abbildung gibt, für die

$$\sup_{z \in R} D_f = K_f, \qquad R\text{: reguläre Punkte von } f,$$

in der Homotopieklasse von $f_2 \circ f_1^{-1}$ minimal ist. Für diese extremale Abbildung ist $D_f$ konstant. Dies nützte TEICHMÜLLER zur Definition einer Metrik $T_g$ aus: $\log K_f$ heisst die Teichmüller-Distanz von $(S_1, f_1)$ und $(S_2, f_2)$.

Wir wollen noch angeben, wie $T_g$ mit den quadratischen Differentialen zusammenhängt, und wie man $T_g$ mit der $n = (6g-6)$-dimensionalen Einheitskugel $\mathbf{E}^n$ identifizieren kann:

$\{\phi_i\}_{i=1}^n$ sei eine Basis der holomorphen quadratischen Differentiale der kompakten Fläche $S_0$ über $\mathbf{R}^1$; $z$ sei ein uniformisierender Parameter, der im folgenden immer beibehalten wird $(z \in \mathbf{E}^2)$. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ seien komplexe Zahlen mit der Eigenschaft

$$0 < |\xi|^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 < 1 .$$

Wir setzen

$$\Phi_\xi = \frac{1}{|\xi|} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Phi_i \equiv \varphi_\xi \, dz^2, \; z \in \mathbf{E}^2 ,$$

und

$$ds_\xi^2 = \lambda^2(z) \cdot |dz + |\xi| \frac{\bar{\varphi}_\xi}{|\varphi_\xi|} d\bar{z}|^2 ,$$

wobei, was hier noch keine Rolle spielt, $\lambda^2 |dz|^2$ die natürliche Metrik $d\mathbf{X}_0^2$ der Fläche $S_0$ aus *Satz A* ist. Ausser bei den Nullstellen $P_i$ von $\phi_\xi$ ist $ds_\xi^2$ regulär und überall gilt

$$d\mathbf{X}_0^2 \cdot |1 - |\xi||^2 \leqslant ds_\xi^2 \cdot \leqslant d\mathbf{X}_0^2 \cdot |1 + |\xi||^2 .$$

Wir versehen

$$\dot{S}_0 = S_0 - \bigcup_{i=1}^{4g-4} P_i$$

mit der zu $ds_\xi^2$ gehörigen Struktur. $\dot{S}_0(ds_\xi^2)$ lässt sich aber durch Hinzufügen der $P_i$ wieder zu einer kompakten Riemannschen Fläche vervollständigen; denn für die Dilatation $D_I$ der identischen Projektion $I$ von $S_0(ds_\xi^2)$ auf $S_0(\lambda^2 |dz|^2)$ gilt

$$D_I^2 = \frac{\sup_\varphi (ds_\xi^2 / \lambda^2 |dz|^2)}{\inf_\varphi (ds_\xi^2 / \lambda^2 |dz|^2)} = \frac{(1 + |\xi|)^2}{(1 - |\xi|)^2} \equiv K^2 .$$

Ist $U_i$ eine zum Kreis $|z| < 1$ konform äquivalente, keine weitere Nullstellen ent-

haltende Umgebung von $P_i$ auf $S_0 = S_0(\lambda^2 |dz|^2)$, so wird

$$(U_i - P_i)(ds_\xi^2)$$

durch $I$ $K$-quasikonform auf

$$(U_i - P_i)(\lambda^2 |dz|^2)$$

abgebildet und ist deshalb auch konform äquivalent zu einer einfach punktierten Kreisscheibe. (s. z.B. [11]).

Wir ordnen $\xi$ das Element aus $T_g$ zu, das durch $(S_0(ds_\xi^2), I)$ repräsentiert wird. Liegt $(S, f)$ in dieser Klasse, so nennen wir $\xi$ einen Modul von $S$; $S_0$ selbst erhält den Modul 0. Man kann aus den Teichmüllerschen Resultaten folgern, dass $T_g$ so topologisch auf $\mathbf{E}^n$ abgebildet wird. (s. [1], [2]).

3.2 *Der Verzerrungssatz*

Die Fläche $S_0$ sei konform äquivalent zum Poincaré-Modell $\mathbf{E}^2/G$. ($\mathbf{E}^2$ ist die universelle Überlagerungsfläche von $S_0$, $G$ die zugehörige Gruppe der Decktransformationen.) $P$ sei ein Fundamentalbereich von $G$ mit einer stückweise stetig differenzierbaren Randkurve (z.B. ein Fricke-Polygon). Im folgenden werden wir den Punkt $\mathbf{X}_0(z) \in S_0$ mit dem zugehörigen Punkt $z \in P$ identifizieren.

VORAUSSETZUNGEN.

1) Jedem $\xi$ des Kompaktums $M \subset \mathbf{E}^{6g-6}$ sei eine Abbildung $f_\xi$ von $S_0(ds_\xi^2)$ auf eine Riemannsche Fläche $S'(\xi)$ zugeordnet.

2) $f_\xi$ sei $K$-quasikonform, d.h. topologisch, fast überall stetig differenzierbar, orientierungstreu und fast überall sei der Dilatationsquotient $D_{f_\xi}(z) \leqslant K$.

3) Auf $P - F$ sei sogar

$$D_{f_\xi}(z) \leqslant 1 + \eta_D$$

und für den Flächeninhalt von $F$ gelte

$$|F| < \eta_F .$$

BEHAUPTUNG.

Für den Modul $\xi'$ von $S'(\xi)$ gilt die Abschätzung

$$|\xi' - \xi| < F_1 ; (M\, \eta_D + F_2(M, K; \eta_F)),$$

wobei die Symbole $F_1$ und $F_2$ folgende Eigenschaften besitzen (vgl. die Bemerkung am Schluss von 2.5)

a) $F_1(M; \delta) \to 0$ für jedes feste $M$, wenn $\delta \to 0$;

b) $F_2(M, K; \eta_F) \to 0$ für jedes feste $M$ und $K$, wenn $\eta_F \to 0$.

Für den Beweis verweisen wir auf [6], S. 100.

3.3 *Die Metrik* $ds_\xi^2$

Ganz analog und aus demselben Grund wie im Fall $g = 1$ (vgl. 2.1) wollen wir

die schon in 3.1 definierte Metrik $ds_\xi^2$ geeignet in zwei Summanden zerlegen. Es ist

$$ds_\xi^2 = \lambda^2(z)\cdot|dz + \psi_\xi d\bar{z}|^2, \qquad \psi_\xi = |\xi|\frac{\bar{\varphi}_\xi}{|\varphi_\xi|}, \qquad |\psi_\xi| = |\xi|.$$

Mit $\Pi(\xi)$ bezeichnen wir die folgende Menge:

$$\Pi(\xi) = \{z \mid |z| < 1, \quad \operatorname{Im}\varphi_\xi(z) \neq 0\}.$$

Auf $\Pi(\xi)$ ist $ds_\xi^2$ reell-analytisch und wir setzen

$$\gamma_\xi = (1 - |\xi|)^{-2}$$
$$\alpha_\xi^2 = 2\gamma_\xi(|\xi| + \operatorname{Re}\psi_\xi)$$
$$\beta_\xi^2 = 2\gamma_\xi(|\xi| - \operatorname{Re}\psi_\xi).$$

In jeder Zusammenhangskomponente von $\Pi(\xi)$ lassen sich stetige reelle Zweige $\alpha_\xi$ und $\beta_\xi$ derart finden, dass

$$\operatorname{sgn}(\alpha_\xi\beta_\xi) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\psi_\xi), \quad \beta_\xi > 0,$$

gilt. Dieselbe Rechnung wie in 2.1 liefert

$$\gamma_\xi ds_\xi^2 = \lambda^2(z)\left(|dz|^2 + (\alpha_\xi dx + \beta_\xi dy)^2\right).$$

3.4 *Die Hilfsfunktionen $\mu_\eta$ und $\mu_{\eta'}$*

Im Gegensatz zum Fall $g = 1$ sind $\alpha_\xi$ und $\beta_\xi$ keine Konstanten mehr, sondern Funktionen von $z$, die noch nicht einmal auf ganz $P$ definiert sind. Die Bestimmung von $h$ läuft andrerseits auf die Lösung einer Differentialgleichung hinaus, in welcher $\alpha_\xi$, $\beta_\xi$ und ihre Ableitungen als Koeffizienten auftreten. Da schon im vie leinfacheren Fall $g = 1$ alle Abänderungen sorgfältig kontrolliert werden mussten, wird es jetzt darauf ankommen, $\alpha_\xi$ und $\beta_\xi$ so auf ganz $P$ fortzusetzen und zu glätten, dass sie mitsamt ihren Ableitungen möglichst wenig verändert werden. Dazu bedarf es einiger Vorbereitungen.

$\alpha_\xi$ und $\beta_\xi$ sind auf

$$N_\xi = \{z \mid z \in \mathbf{E}^2, \operatorname{Im}\varphi_\xi(z) = 0\}$$

noch nicht definiert. Wir betrachten $\varphi_\xi(z)$ als Funktion von $(z, \xi)$, nennen sie deshalb $\varphi(z, \xi)$, und stellen ihre für uns wichtigen Eigenschaften zusammen:

$\alpha$) $\varphi(z, \xi)$ und $\partial/\partial z\,\varphi(z, \xi) \equiv \varphi'(z, \xi)$ sind stetig auf $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{E}^n$, $n = 6g - 6$,

$\beta$) Für jedes feste $\xi \in \mathbf{E}^n - \{0\}$ ist $\varphi(z, \xi)$ holomorph und nicht konstant in $\mathbf{E}^2$.

Lemma 5.

$$\Gamma(a, \xi) = \{z \mid \varphi(z, \xi) = a\}$$

*ändert sich stetig mit $\xi$, wenn jede a-Stelle mit ihrer Vielfachheit gezählt wird.*

*Beweis.* Ist $z_0$ $n$-fache a-Stelle von $\varphi(z, \xi_0)$ und $K$ irgendein Kreis um $z_0$, in dessen Hülle keine weiteren a-Stellen mehr vorkommen, so wird also behauptet, es gäbe eine Umgebung $U$ von $\xi_0$ derart, dass $\varphi(z, \xi)$ in $K$ für jedes $\xi \in U$ $n$-mal den Wert $a$ annimmt. Dies folgt aber leicht aus dem Umlaufsprinzip.

LEMMA 6.

a) *$N_\xi$ ändert sich auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbf{E}^2$ stetig mit $\xi$, d.h. zu jeder Umgebung $U$ von $N_{\xi_0} \cap K$ ist für eine ganze Umgebung $U'$ von $\xi$.*

$$(N_\xi \cap K) \subset U \qquad \forall \xi \in U' .$$

b) *Ist $M \subset \mathbf{E}^n$ kompakt, so gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass der Inhalt von $K \cap N_\xi(\delta)$,*

$$N_\xi(\delta) = \{z \mid \text{Distanz}(z, N_\xi) < \delta\} .$$

*für alle $\xi \in M$ kleiner als $\eta$ wird.*

Diese Aussagen folgen leicht aus der Kompaktheit von $K$ bzw. $M$ und aus der Stetigkeit bzw. der Holomorphie von $\varphi$.

LEMMA 7. *$K \subset \mathbf{E}^2$ und $M \subset \mathbf{E}^n$ seien kompakt. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es dann endlich viele reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ mit der folgenden Eigenschaft: Für*

$$U(x_i, \xi, \delta) = \bigcup_{z_{ij} \in \varphi^{-1}(x_i, \xi) \cap K} \{z \mid |z - z_{ij}| < \delta\}$$

*gilt*

$$(K \cap N_\xi) \subset \bigcup_{i=1}^{N} U(x_i, \xi, \delta) \qquad \forall \xi \in M .$$

Auch dies folgt leicht aus der Kompaktheit von $M$ und den *Lemmas* 6 und 6a.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die Abänderungsfunktionen $\mu$, $\mu_\eta$ und $\mu_{\eta'}$ konstruieren:

$P$ sei der Fundamentalbereich aus *Satz A*.

Die *Funktion* $\mu(z) \geqslant 0$ sei $C^\infty$ in $\mathbf{C}$, identisch 0 auf einer Umgebung $U_1$ von $\mathbf{C} - P$ und identisch 1 ausserhalb einer weiteren Umgebung $U \supset U_1$ von $\mathbf{C} - P$, wobei

$$|P \cap U| < \eta/2$$

sein soll.

*Die Funktion* $\tau(x)$ sei für $x \geqslant 0$ $C^\infty$ und es gelte

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leqslant 1 \\ 1 & \text{für} \quad x \geqslant 4 \end{cases}; \qquad 0 \leqslant \tau(x) \leqslant 1 .$$

Zu $K = P$ und einem vorgegebenen Kompaktum $M \subset \mathbf{E}^n$ wählen wir nach *Lemma* 6 *b*) ein $\delta' > 0$ mit der Eigenschaft

$$|N_\xi(\delta') \cap P| < \eta/2 ;$$

und zu

$$\delta = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Min}\,(\delta',\ \mathrm{Distanz}\,(\partial P,\ \mathbf{C} - U_1))$$

bestimmen wir nach *Lemma* 7 geeignete Zahlen $x_1, \ldots, x_N$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{N} U(x_i, \xi, \delta) \supset K \cap N_\xi$$

und setzen

$$\Gamma_\xi = \left\{ z_{ij} |\ \varphi_\xi(z_{ij}) \in \bigcup_{i=1}^{N} \{x_i\} \right\},$$

$$\mu_\eta(z, \xi) = \mu(z) \prod_{z_{ij} \in \Gamma_\xi} \tau\left( \frac{|z - z_{ij}|^2}{\delta^2} \right).$$

Es gilt:

a) $\mu_\eta(z, \xi) \equiv 0$ auf $\bigcup_{i=1}^{N} U(x_i, \xi, \delta)$,

b) $\mu_\eta(z, \xi) \equiv 1$ auf $P - F$ mit $F = (N_\xi(\delta') \cap P) \cup (P \cap U)$,

c) $|F| < \eta$,

d) $\mu_\eta(z, \xi)$ ist auf $\mathbf{C} \times M$ stetig.

a) und c) sind klar, während b) aus $\delta < \frac{1}{2}\delta'$, also

$$\{z |\ |z - z_{ij}|\ \delta^{-1} < 2\} \subset N_\xi(\delta')$$

sofort folgt. Nach *Lemma* 5 sind die in der Definition von $\mu_\eta$ auftretenden Faktoren auf $\mathbf{C} \times M$ stetig. In $U_1$ ist $\mu_\eta \equiv 0$; ist aber $z_0$ in $\mathbf{C} - U_1$, so ist für alle $z$ mit $|z - z_0| < \delta$ höchstens dann

$$\tau(|z - z_{ij}|^2 \cdot \delta^{-2}) \neq 1,$$

wenn

$$|z_{ij} - z_0| \leqslant |z_{ij} - z| + |z - z_0| < 3\,\delta \leqslant \mathrm{Distanz}(z_0, \partial P),$$

d.h. $z_{ij} \in P$ ist, also nur für endlich viele $z_{ij}$. Bei $z_0$ ist also $\mu_\eta$ das Produkt endlich vieler stetiger Funktionen und folglich selbst stetig, womit auch d) gezeigt ist.

Analog konstruieren wir eine Funktion $\mu_{\eta'}(z, \xi)$, die ebenfalls in einer Umgebung von $(\mathbf{C} - P) \cup N_\xi$ verschwindet, aber zudem höchstens dort nicht identisch 1 ist, wo $\mu_\eta = 0$ gilt:

$$1 - \mu_{\eta'}(z) = 0, \quad \text{falls} \quad \mu_\eta(z) \neq 0.$$

3.5 *Die Lösung einer Differentialgleichung*

Wir setzen $z = x + iy = (x, y)$ und

$$\tilde{\alpha}_\xi = \mu_{\eta'} \cdot \alpha_\xi,\ \tilde{\beta}_\xi = \mu_{\eta'} \cdot \beta_\xi + 1 - \mu_{\eta'},$$

womit $\tilde{\alpha}_\xi$ und $\tilde{\beta}_\xi$ auf ganz $\mathbf{R}^2$ definiert und differenzierbar sind und die Beziehungen

$$\tilde{\beta}_\xi > 0, \quad \mu_\eta \alpha_\xi = \mu_\eta \cdot \tilde{\alpha}_\xi, \quad \mu_\eta \beta_\xi = \mu_\eta \tilde{\beta}_\xi$$

gelten; ferner sei

$$a = -\frac{\tilde{\alpha}_\xi}{\tilde{\beta}_\xi}, \qquad b = \left(\frac{\partial \tilde{\beta}_\xi}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\alpha}_\xi}{\partial y}\right)\frac{1}{\tilde{\beta}_\xi}, \qquad y^* = y - y_0, \qquad y_0 \in \mathbf{R}^1 .$$

Wir wollen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, \xi) + a(x, y, \xi)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, \xi) = b(x, y, \xi),$$

$$u(0, y, \xi) = 0 \quad \text{für} \quad (y, \xi) \in \mathbf{R}^1 \times M$$

lösen.

Für jedes Paar $(y_0\ \xi)$ besitzt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dy^*}{dx}(x, y_0, \xi) = a(x, y^* + y_0, \xi), \qquad y^*(0, y_0, \xi) = 0,$$

genau eine Lösung. Ausserdem ist $y^*(x, y_0, \xi)$ stetig in $\mathbf{R}^2 \times M$ und nach $x$ und $y_0$ differenzierbar (s. [13], p. 70). Dasselbe gilt auch für die Funktion

$$u^*(x, y_0, \xi) = \int_0^x b(t, y^*(t, y_0, \xi), \xi)\, dt .$$

Die Abbildung $g: \mathbf{R}^2 \times M \to \mathbf{R}^2 \times M$

$$g(x, y_0, \xi) = (x, y_0 + y^*(x, y_0, \xi), \xi) = (x, y(x, y_0, \xi), \xi)$$

ist stetig in $\mathbf{R}^2 \times M$ und bijektiv, wie man leicht nachprüft, also nach dem Satz von der Gebietsinvarianz auch topologisch.

Die Funktion

$$u = u^* \circ g^{-1} : \mathbf{R}^2 \times M \to \mathbf{R}^1$$

ist die Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung und sie ist für ein festes $\xi$ nach $x$ und $y$ differenzierbar (s. [13], p. 173). Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt, dass $u$ in $\mathbf{R}^2 \times M$ stetig ist und daher auch auf $\mathbf{E}^2 \times M$ beschränkt:

$$|u(x, y, \xi)| \leqslant u_0 \qquad \forall (x, y, \xi) \in \mathbf{E}^2 \times M .$$

3.6 *Die Abänderungsfunktion* $h_0(z, \xi, \eta, N)$

$$\omega = e^{u_0 - u}(\tilde{\alpha}_\xi\, dx + \tilde{\beta}_\xi\, dy)$$

ist auf Grund obiger Differentialgleichung ein geschlossenes Differential und folglich auf $\mathbf{E}^2$ exakt; d.h.

$$\omega = dk(x, y, \xi),$$

wobei $k$ stetig auf $\mathbf{E}^2 \times M$ und differenzierbar in $x$ und $y$ ist.

Wir setzen (vgl. 2.5)

$$h_0(x, y; \xi, N) = \frac{1}{N}\,\lambda(x, y)\,\mu_\eta(x, y, \xi)\,e^{u(x, y, \xi) - u_0}\,v_\eta[N\,k(x, y, \xi)]$$

und finden wie in 2.5

$$dh_0^2 = \lambda^2 \cdot \mu_\eta^2 \cdot \dot{v}_\eta^2 \cdot (\alpha_\xi\,dx + \beta_\xi\,dy)^2 + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Wir müssen uns noch davon überzeugen, dass der Inhalt der Fläche

$$F = \{(x, y) \mid (x, y) \in P,\ \mu_\eta(x, y, \xi) \cdot \dot{v}_\eta^2\,[N\,k(x, y, \xi)] \neq 1\}$$

unabhängig von $N$ und $\xi$ beliebig klein gemacht werden kann. Nach der Konstruktion von $\mu_\eta$ ist dies nur für die folgende Teilfläche $F_1 \subset F$ nicht selbstverständlich:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, y) \mid \dot{v}_\eta^2\,(N\,k(x, y, \xi)) \neq 1\} \\ &= \left\{(x, y) \mid |k(x, y, \xi) - \frac{1}{N}| \leqslant \frac{\eta}{N} \bmod \frac{2}{N}\right\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\Phi_\xi(x, y) = (x, k(x, y, \xi))$$

bildet $P$ schlicht in die Ebene ab, da auf $P$

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x, y, \xi) = e^{u_0 - u}\,\tilde{\beta}_\xi > 0$$

ist. Die Funktionaldeterminante von $\phi_\xi$

$$\det(d\Phi_\xi) = e^{u_0 - u}\,\tilde{\beta}_\xi > 0$$

ist im Kompaktum $P \times M$ stetig, und folglich gilt

$$\operatorname*{Min}_{P \times M} \det(\mathrm{d}\Phi_\xi) = \sigma > 0.$$

Da die Funktion $k$ in $P \times M$ beschränkt, $\leqslant R$, ist, ist auch

$$\bigcup_{\xi \in M} \Phi_\xi(P) \subset [-1, +1] \times [-R, +R],$$

also beschränkt. Für den Inhalt der horizontalen, äquidistanten Streifen der Breite $2\eta/N$, aus denen sich $\phi_\xi(F_1)$ zusammensetzt, erhält man die Abschätzung

$$|\Phi_\xi(F_1)| \leqslant \frac{2\eta}{N} \cdot 2 \cdot \left(1 + \left[2R : \frac{2}{N}\right]\right) = \eta\left(4R + \frac{4}{N}\right),$$

und für $|F_1|$

$$|F_1| = \int\limits_{\Phi_\xi(F_1)} |\det(d\Phi_\xi^{-1})|\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\sigma}\,|\Phi_\xi(F_1)| < k'_M \cdot \eta.$$

Die Resultate von 3.3 und 3.6 können wir so zusammenfassen:

*Lemma* 2 in 2.6 gilt auch im Fall $g > 1$. (Die Bedeutung von $h_0$, $\lambda$, $P$, ... ist jetzt natürlich eine andere als im ursprünglichen *Lemma* 2.)

3.7 *Eine Approximation von* $h_0$ *(vgl.* 2.6*)*

Statt der Fourierentwicklung benützen wir im Fall $g > 1$ die Entwicklung nach den Eigenfunktionen von

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

wobei $\Delta$ der Laplace-Operator auf der Fläche $S_0(\lambda^2 |dz|^2)$ sein soll. Die Voraussetzungen a) und b) von *Lemma* 3 sind für die $n$-ten Partialsummen der Entwicklung von $h_0$ bekanntlich erfüllt.

3.8 *Der Beweis von Satz A (vgl.* 2.8*)*

*Lemma* 4 folgt allein aus *Lemma* 2 und *Lemma* 3, gilt also auch für $g > 1$.

Ebenso kann 2.8 wörtlich übernommen werden, wenn man nur die eingeklammerten Zusätze überspringt.

## 4. Der Satz B

4.1 *Die Flächen mit endlich erzeugter Fundamentalgruppe*

Eine Fläche vom Geschlecht $g$ mit $m$ parabolischen und $n$ hyperbolischen Enden heisse *vom Typ* $(g, m, n)$. Zwei Flächen mit endlich erzeugter Fundamentalgruppe sind genau dann quasikonform äquivalent, wenn sie vom selben Typ sind. (Dies folgt z.B. aus den Betrachtungen des nächsten Abschnittes.)

In den folgenden Spezialfällen sind Flächen vom selben Typ schon konform äquivalent:

$(0, i, 0)$, $i = 0, 1, 2, 3$: $i$-fach punktierte Kugel,

$(0, i, 1)$, $i = 0, 1$: $i$-fach punktierter Kreis.

Wir wollen jeden Typ durch eine VDF (vollständige differentialgeometrische Fläche) repräsentieren. Für die obigen Fälle ist damit *Satz B* schon bewiesen.

Die Ebene ist die einfachste VDF vom Typ (0, 1, 0). Flächen vom Typ (0, 0, 1) wurden in Arbeiten von OSSERMAN, JENKINS und H. HUBER (s. [8]) konstruiert, wobei sich die letzteren durch besondere Anschaulichkeit und Einfachheit auszeichnen. Sie liegen nämlich schlicht über der Ebene, können also in der Form

$$\mathbf{X}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

dargestellt werden; und $f$ hat u.a. die folgenden Eigenschaften:

a) $f$ ist differenzierbar,

b) $f(x, y) = 0$ für $(x, y) \in \mathbf{E}^2$,

c) $|f(x, y)| < 1 \ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Eine solche Fläche werde ich im folgenden *Standardfläche vom hyperbolischen Typus* nennen.

Als Standardtyp $F(g, 0, 0)$ einer VDF vom Typ $(g, 0, 0)$ wählen wir die Einheitssphäre mit $g$ Henkeln, die alle im untern Halbraum $\{(x, y, z) | z < 0\}$ liegen sollen. $F(g, 1, 0)$ erhalten wir, wenn wir aus $F(g, 0, 0)$ die Punkte in

$$\{(x, y, z) \mid (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 < \tfrac{1}{16}, z > 0\}$$

herausnehmen und den Rest durch ein Zylinderstück mit

$$\{(x, y, z) \mid (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \geqslant \tfrac{1}{16}, z = 2\}$$

verbinden und die so erhaltene Fläche glätten. Klebt man auf die gleiche Weise auf $F(g, 0, 0)$ statt einer Ebene eine in Richtung der positiven $z$-Achse verschobene Standardfläche vom hyperbolischen Typus, so erhält man ein Modell von Typ $(g, 0, 1)$.

Um ein Modell vom Typ $(g, m, n)$ zu konstruieren, muss man also auf $F(g, 0, 0)$ $m$ Ebenen $E_1, \ldots, E_m$ und $n$ Standardflächen vom hyperbolischen Typus $H_{m+1}, \ldots, H_{m+n}$ setzen, indem man sukzessive jede dieser Flächen auf das im vorigen Schritt entstandene Gebilde türmt; die zylindrischen Verbindungen werden am oberen Ende also von

$$\left\{(x, y, z) \mid \left(x + \frac{(-1)^j}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}, z = 2j\right\}_{j=1}^{m+n}$$

berandet. Die so aufgebaute Fläche ist frei von Selbstdurchdringungen und soll es auch nach der Glättung sein.

Die so entstandene VDF vom Typ $(g, m, n)$ nennen wir im folgenden $S_0$.

### 4.2 *Der zu S gehörige Teichmüllerraum*

Koebe zeigte, dass jede Fläche $S$ vom Typ $(g, m, n)$ konform auf ein Teilgebiet einer kompakten Riemannschen Fläche abgebildet werden kann, dessen Rand aus $m$ isolierten Punkten und $n$ analytischen Jordankurven besteht.

Ahlfors zeigte in [1], wie sich die Teichmüllerschen Sätze auch auf berandete Flächen mit endlich vielen analytischen Randkurven und endlich vielen ausgezeichneten Punkten übertragen lassen.

Mit diesen Resultaten werden wir im nächsten Abschnitt den Beweis von *Satz A* so modifizieren, dass er zu einem Beweis von *Satz B* wird. In diesem Abschnitt skizzieren und ergänzen wir noch die Überlegungen von Ahlfors:

$S$ und $S_0'$ seien Teilgebiete vom Typ $(g, m, n)$ von kompakten Flächen mit den $m$ isolierten Randpunkten $p_i$ bzw. $p_i^{(0)}$ und den $n$ analytischen Randkurven $\gamma_i$ bzw. $\gamma_i^{(o)}$. Durch Hinzunahme der Randpunkte und Verdoppelung über die Randkurven erhalten wir für $n \neq 0$ zwei kompakte Flächen $\bar{S}, \bar{S}_0'$ mit je $2m$ (für $n = 0: m$) ausgezeichneten Punkten, die den isolierten Randpunkten entsprechen. $\bar{J}$ bzw. $\bar{J}_0$ sei (für

$n \neq 0$) die antikonforme Abbildung, die jedem Punkt sein Doppel zuordnet. Das Geschlecht $\bar{g}$ von $\bar{S}$ und $\bar{S}_0'$ ist $2g + n - 1$. Der einfacheren Darstellung wegen treffen wir noch folgende Vereinbarung: Durch eventuelle Auszeichnung weiterer Punkte soll erreicht werden, dass die Anzahl $N$ der ausgezeichneten Punkte auf jeder Hälfte von $\bar{S}$ und $\bar{S}_0'$ gerade und die Gesamtanzahl grösser als $8 - 4n$ wird.

Schliesslich gehen wir zu den zweifachen Überlagerungsflächen von $\bar{S}$ und $\bar{S}_0'$ über, deren Verzweigungspunkte gerade die ausgezeichneten Punkte sind. Wegen unserer Vereinbarung ist das Geschlecht $\hat{g}$ dieser Flächen $\hat{S}$ bzw. $\hat{S}_0'$ grösser als 1:

$$\hat{g} = 2\bar{g} + \tfrac{1}{2}N - 1 > 4g + 2n - 3 + 4 - 2n \geqslant 1 .$$

Für $n \neq 0$ seien $\hat{J}$ bzw. $\hat{J}_0$ je eine der durch $\bar{J}$ bzw. $\bar{J}_0$ induzierten antikonformen Abbildungen von $\hat{S}$ bzw. $\hat{S}_0'$ auf sich.

$z$ sei ein uniformisierender Parameter von $\hat{S}_0'$ ($z \in \mathbf{E}^2$), $G_2$ sei die Gruppe der linearen Transformationen, die der Deckgruppe von $\hat{S}_0'$ entspricht, $G$ die Obergruppe von $G_2$ der Decktransformationen von $\mathbf{E}^2$ über $\bar{S}_0' : [G : G_2] = 2$. $J_0$ sei eine antikonforme Abbildung von $\mathbf{E}^2$ auf $\mathbf{E}^2$, die $\hat{J}_0$ entspricht.

Ahlfors zeigt:

a) Es gibt genau eine extremale quasi-konforme Abbildung

$$f : \hat{S} \to \hat{S}_0' .$$

b) Zu $f$ gehört ein bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmtes holomorphes quadratisches Differential $\phi = \varphi(z)\, dz^2$ und eine Konstante $k$, $0 \leqslant k < 1$, derart dass

$$f : \hat{S} \to \hat{S}_0' \left( dz + k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|} d\bar{z} \right)^2$$

konform ist.

c) Es gelten für dieses Differential die Gleichungen

$$\Phi(T z) = \Phi(z), \forall\, T \in G ,$$
$$\Phi(J_0 z) = \Phi(z) .$$

d) $f$ induziert eine konforme Abbildung von $S$ auf

$$S_0' \left( dz + k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|} d\bar{z} \right)^2 .$$

Die holomorphen quadratischen Differentiale auf $\hat{S}_0'$ mit den Eigenschaften in c) bilden einen endlich-dimensionalen reellen Vekktorraum $\Omega$ mit einer Basis $\phi_1, \ldots, \phi_r$. Wir können also auch für die Flächen vom Typ $(g, m, n)$ wie in 3.1 einen Teichmüllerraum definieren und ihn mit $\mathbf{E}^r$ identifizieren.

4.3 *Modifizierung des Beweises von Satz A* (vgl. 2.8)

Der Verzerrungssatz gilt auch in den neuen Teichmüllerräumen. Denn wenn wir die Basis $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ von $\Omega$ zu einer Basis aller holomorphen quadratischen Differentiale auf $S_0'$ ergänzen, umfasst der zugehörige Teichmüllerraum den von $\hat{S}_0'$; damit wird der neue Verzerrungssatz zu einem Spezialfall des früheren.

$\varepsilon$, $M$, $K$, $\eta_D$ und $\eta_F$ werden zum beliebig vorgegebenen Modul $\xi_0 \neq 0$ wie in 2.8 bestimmt.

$S_0'$ sei ein Teilgebiet einer kompakten Fläche, dessen Rand aus isolierten Punkten und analytischen Kurven besteht, und das konform äquivalent zum vorgegebenen Normalmodell $S_0$ vom Typ $(g, m, n)$ ist. Wir konstruieren wie im vorigen Abschnitt $\hat{S}_0'$ und zeichnen einen zu $\hat{S}_0'$ gehörigen Fundamentalbereich $P$ in $\mathbf{E}^2$ aus.

$\hat{S}_0'$ können wir uns aus $\bar{S}_0'$ so entstanden denken: Die ausgezeichneten Punkte $P_i^0$ werden auf $\bar{S}_0'$ durch $\frac{1}{2}N$ zueinander und zu den $\gamma_i^0$ disjunkte Kurven so verbunden, dass jeder der $P_i^0$ Anfangs- oder Endpunkt ist. Zwei längs dieser Kurven aufgeschnittene Exemplare $(\bar{S}_0')_i$, $i = 1, 2$, werden längs der Schnitte kreuzweise verheftet. $\Gamma$ sei die Vereinigung der diesen Schnitten und den $\gamma_i^0$ entsprechenden Kurven auf $P$.

$U'$ und $U$ seien offene Umgebungen von $\Gamma$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\bar{U} \subset U'$

b) $|U'| < \frac{1}{2}\eta_F$

c) die $P - U$ entsprechende kompakte Teilmenge von $\hat{S}_0'$ zerfällt in vier Zusammenhangskomponenten (zwei für $n = 0$), die alle demselben Kompaktum $S_1'$ von $S_0'$ entsprechen.

Bezüglich dem zu $S_1'$ gehörigen Kompaktum $S_1$ von $S_0$ bestimmen wir nach *Lemma* 1 das $\varepsilon_0$ und nur auf $S_1$ wird $S_0$ im folgenden abgeändert. Wir identifizieren zur Vereinfachung der Ausdruckweise $S_1$ mit einem der zugehörigen Teilbereiche $P_1$ von $P$.

$h = h_0$ wird auf $P_1$ wie früher (s. 3.6) definiert, (wobei $\eta_F$ durch $\eta_F/8$ ersetzt werden muss,) und so abgeändert, dass $h$ in $U \cap P_1$ verschwindet und ausserhalb $U' \cap P_1$ unverändert bleibt. Die natürliche Struktur der abgeänderten Fläche wird auf $\hat{S}_0'$ verpflanzt und mit $J_0$ und einer geeigneten Transformation aus $G$ auf ganz $\hat{S}_0'$ fortgesetzt, womit sich also alle Symmetrieeigenschaften von $\hat{S}_0$ auf die abgeänderte Fläche $\hat{S}_0'(dX^2)$ übertragen.

Wegen der Kompaktheit von $P - U$ kann der Beweis wie früher beendet werden. Die Approximation von $h$ durch die Folge $h_n$ fällt hier allerdings weg.

Zufolge der Symmetrieeigenschaften der Flächen $\hat{S}_0'(dX^2)$ gehören deren Moduln zum Raum $\mathbf{E}^r$. Wir können deshalb den Kontinuitätsschluss im $\mathbf{E}^r$ anwenden und erhalten so den Nachweis der Existenz einer Fläche $S_0'(dX_{\xi_1}^2)$ mit den Modul $\xi_0$. Die zugehörige, aus $S_0$ durch Abänderung in der Richtung der Normalen entstandene Fläche ist daher die gesuchte vollständige differentialgeometrische Fläche.

## LITERATURVERZEICHNIS

[1] AHLFORS, L., *On Quasiconformal Mappings*, J. d'Analyse Math., *3*, 1 (1953/4).
[2] BERS, L., *Quasiconformal Mappings and Teichmüller's Theorem, Analytic Functions* (Princeton Univ. Press 1960), S. 89–119.
[3] GARSIA, A. M., *Calculation of Conformal Parameters for Some Imbedded Riemann Surfaces*, Pac. J. Math, *10*, 121–165 (1960).
[4] GARSIA, A. M., *Imbeddings of Riemann Surfaces by Canal Surfaces*, Rend. Circ. Math., Palermo [Ser. II] *IX*, 313–333 (1960).
[5] GARSIA, A. M. und RODEMICH, E., *An Imbedding of Riemann Surfaces of Genus One*, Pac. J. Math. *11*, 193–204, (1961).
[6] GARSIA, A. M., *An Embedding of Closed Riemann Surfaces in Euclidean Space*, Comment. Math. Helv. *35*, 93–110 (1961).
[7] GARSIA, A. M., *On the Conformal Types of Algebraic Surfaces of Euclidean Space*, Comment. Math. Helv. *37*, 49–60 (1962/3).
[8] HUBER, H., *Riemannsche Flächen von hyperbolischem Typus im euklidischen Raum*, Math. Ann. *139*, 140–146 (1959).
[9] HUREWICZ, W. und WALLMANN, H., *Dimension Theory* (Princeton Univ. Press 1941).
[10] KLOTZ, T., *Imbedding Compact Riemann Surfaces in 3-Space*, Pac. J. Math. *11*, 1035–1043, (1961).
[11] LEHTO, O. und VIRTANEN, K., *Quasikonforme Abbildungen* (Springer 1965).
[12] NASH, J., *$C^1$-isometric Imbeddings*, Ann. of Math. *63*, 20–63, (1956).
[13] PETROWSKI, I. G., *Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* (Teubner, Leipzig 1954), S. 104.
[14] TEICHMÜLLER, O. *Beweis der analytischen Abhängigkeit des konformen Moduls einer analytischen Ringflächenschar von den Parametern*, Deutsche Math. *7*, 309–336 (1944).
[15] WEYL, H. *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 3. Aufl. (Teubner, Stuttgart 1955).

Eingegangen, den 30. Januar 1968

## Curriculum vitae

Am 20. November 1941 wurde ich, RETO ANTON RÜEDY, Bürger von Basel und Malans (Graubünden), in Chur als Sohn des Zollbeamten ABRAHAM RÜEDY und seiner am 4. Dezember 1954 verstorbenen Gattin KLARA DOMENICA FOPP geboren.

In der Stadt Basel, wo unsere Familie seit 1941 wohnte und deren Bürgerrecht wir 1961 erlangten, ging ich in die Primarschule, von 1952 bis 1960 ans Realgymnasium und bestand 1960 die Maturitätsprüfung.

Im selben Jahr immatrikulierte ich mich an der hiesigen Universität. Während meines Studiums, das ganz in Basel verlief, besuchte ich Vorlesungen und Übungen bei den Herren Professoren K. ALDER, E. BALDINGER, W. BECKER, P. BUCHNER, R. CONZELMANN, M. EICHLER, W. HABICHT, H. HUBER, P. HUBER, E. MIESCHER, B. SCARPELLINI, H. R. STRIEBEL und legte folgende Examina ab:

1962 Nebenfachexamen in Astronomie,
1963 Nebenfachexamen in Experimentalphysik,
1965 Diplomexamen in Mathematik.

Allen meinen Lehrern möchte ich hier herzlich danken. Meinen ganz besonderen Dank aber richte ich an Herrn Prof. Dr. HEINZ HUBER, dessen einzigartige Vorlesungen ich geniessen durfte, unter dessen Leitung diese Dissertation entstand und der mir seit dem 1. Januar 1966 eine seiner Assistentenstellen anvertraute.